دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

حل مسائل مکانیابی به طور موازی
با استفاده از روش‌های نقطه داخلی

احسان منبتی

استاد راهنما
دکتر حسین تقی‌زاده کاخکی

استاد مشاور
دکتر فائزه توتونیان

۲۸ شهریور ۱۳۸۸

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

۱ روش‌های نقطه داخلی
۲ موازی سازی
۳ روش‌های نقطه داخلی برای برنامه‌های صحیح مختلط
۴ مسائل مکانیابی
۵ نتایج محاسباتی

۱ - روش‌های نقطه داخلی

شکل استاندارد برنامه‌های خطی

۱ - روش‌های نقطه داخلی

شکل استاندارد برنامه‌های خطی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن A یك ماتریس $m \times n$ با رتبه‌ی سطری کامل، $b \in \mathbb{R}^m$ و $c \in \mathbb{R}^n$.
این مسأله را **مسأله‌ی اولیه** می‌نامیم.

نظیر هر مسأله‌ی اولیه مانند مسأله‌ی (۱) یك برنامه‌ی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{array}{ll} \max & b^T x \\ \text{s.t.} & A^T s + y = c \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad (۲)$$

که به آن **مسأله‌ی دوگان** گفته می‌شود.

نظیر هر مسأله‌ی اولیه مانند مسأله‌ی (۱) یك برنامه‌ی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T x \\ \text{s.t.} \quad & A^T s + y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

که به آن **مسأله‌ی دوگان** گفته می‌شود.

بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را شدنی اولیه خوانیم هرگاه $Ax = b$ و $x \geq 0$ و بردار $y \in \mathbb{R}^n$ را شدنی دوگان گوییم هرگاه بردار $s \in \mathbb{R}^m$ موجود باشد به طوری که $A^T s + y = c$ و $y \geq 0$، گاهی به دوتایی (s, y) نیز نقطه‌ی شدنی دوگان گفته می‌شود.

قضیه‌ی ضعیف دوگانی

مسائل اولیه و دوگان (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. اگر x یك نقطه‌ی شدنی اولیه و (s, y) نقطه‌ی شدنی دوگان باشند آنگاه $c^T x \geq b^T y$.

قضیه‌ی ضعیف دوگانی

مسائل اولیه و دوگان (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. اگر x یك نقطه‌ی شدنی اولیه و (s, y) نقطه‌ی شدنی دوگان باشند آنگاه $c^T x \geq b^T y$.

قضیه‌ی قوی دوگانی

مسائل اولیه و دوگان (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. در این صورت

- اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهینه‌ی متناهی داشته باشد آنگاه دیگری شدنی است وجواب بهینه‌ی متناهی دارد.
- اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان بی‌کران باشد آنگاه مسأله‌ی دیگر نشدنی است.

قضیه‌ی ضعیف دوگانی

مسائل اولیه و دوگان (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. اگر x یك نقطه‌ی شدنی اولیه و (s, y) نقطه‌ی شدنی دوگان باشند آنگاه $c^T x \geq b^T y$.

قضیه‌ی قوی دوگانی

مسائل اولیه و دوگان (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. در این صورت

- اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهینه‌ی متناهی داشته باشد آنگاه دیگری شدنی است وجواب بهینه‌ی متناهی دارد.
- اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان بی‌کران باشد آنگاه مسأله‌ی دیگر نشدنی است.

قضیه‌ی گلدمن-تاکر

اگر مسائل اولیه و دوگان دارای جواب بهینه باشند آنگاه جواب بهینه‌ای برای اولیه مانند x^* و جواب بهینه‌ای برای دوگان مانند (s^*, y^*) وجود دارند به طوری که $x^* + y^* > 0$.

شرایط بهینگی مرتبه‌ی اول

شرایط بهینگی مرتبه‌ی اول

با استفاده از قضایای اخیر می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای اینکه x جواب بهینه‌ی اولیه و (s, y) جواب بهینه‌ی دوگان باشند این است که

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \qquad \text{(شدنی اولیه)}$$

$$A^T s + y = c, \quad y \geq 0 \qquad \text{(شدنی دوگان)}$$

$$xy = 0. \qquad \text{(مکمل کمبود)}$$

شرایط بهینگی مرتبه‌ی اول

با استفاده از قضایای اخیر می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای اینکه x جواب بهینه‌ی اولیه و (s, y) جواب بهینه‌ی دوگان باشند این است که

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \qquad \text{(شدنی اولیه)}$$

$$A^T s + y = c, \quad y \geq 0 \qquad \text{(شدنی دوگان)}$$

$$xy = 0. \qquad \text{(مکمل کمبود)}$$

مجموعه‌ی نقاط شدنی اولیه-دوگان

$$F = \{z = (x, y, s) \ : \ Ax = b, A^T s + y = c, \ (x, y) \geq 0\}$$

شرایط بهینگی مرتبه‌ی اول

با استفاده از قضایای اخیر می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای اینکه x جواب بهینه‌ی اولیه و (s, y) جواب بهینه‌ی دوگان باشند این است که

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \qquad \text{(شدنی اولیه)}$$

$$A^T s + y = c, \quad y \geq 0 \qquad \text{(شدنی دوگان)}$$

$$xy = 0. \qquad \text{(مکمل کمبود)}$$

مجموعه‌ی نقاط شدنی اولیه-دوگان

$$F = \{z = (x, y, s) \ : \ Ax = b, A^T s + y = c, \ (x, y) \geq 0\}$$

مجموعه‌ی نقاط اکیداً شدنی اولیه-دوگان

$$F^\circ = \{z = (x, y, s) \ : \ Ax = b, A^T s + y = c, \ (x, y) > 0\}$$

دانشکده علوم ریاضی

یك نقطه‌ی شدنی اولیه-دوگان مانند $z = (x, s, y)$ را مکمل گوییم هرگاه $xy = 0$ و گوییم اکیداً مکمل است هر گاه علاوه بر این داشته باشیم $x + y > 0$.

یك نقطه‌ی شدنی اولیه-دوگان مانند $z = (x, s, y)$ را مکمل گوییم هرگاه $xy = 0$ و گوییم اکیداً مکمل است هر گاه علاوه بر این داشته باشیم $x + y > 0$.

با فرض

$$F(x, s, y) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T s + y - c \\ xy \end{bmatrix}$$

و با توجه به شرایط بهینگی مرتبه‌ی اول می‌توان گفت که هدف حل دستگاه زیر است

$$F(x, s, y) = 0 \quad (۳)$$

$$x, y \geq 0 \quad (۴)$$

روش نیوتن

روش نیوتن

در روش تکراری نیوتن برای حل دستگاه (۳) ، تکرار جدید از رابطه‌ی

$$z^{k+1} = z^k + \Delta z$$

به دست می‌آید که در آن Δz در دستگاه زیر صدق می‌کند

$$\nabla F(z^k)\Delta z = -F(z^k)$$

اما لزومی ندارد که تکرارهای حاصل از روش نیوتن در شرایط کرانی (۴) صدق کنند. از این رو نمی‌توان روش نیوتن را به طور مستقیم بر دستگاه (۳) اعمال کرد.

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

روش نقطه داخلی با یك تکرار اکیداً شدنی اولیه دوگان مانند $z^0 = (x^0, s^0, y^0)$ آغاز می‌شود. این نقطه در معادلات خطی (شدنی اولیه) و (شدنی دوگان) صدق می‌کند ولی معادله (مکمل کمبود) را به اندازه‌ی $x^0 y^0$ نقض می‌کند. فرض کنیم $\tau > 0$. قرار می‌دهیم

$$F_\tau(x, s, y) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T s + y - c \\ xy - \tau e \end{bmatrix}$$

که در آن e برداری است که همه‌ی درایه‌های آن برابر یك است.

روش نقطه داخلی با یك تکرار اکیداً شدنی اولیه دوگان مانند $z^0 = (x^0, s^0, y^0)$ آغاز می‌شود. این نقطه در معادلات خطی (شدنی اولیه) و (شدنی دوگان) صدق می‌کند ولی معادله (مکمل کمبود) را به اندازه‌ی $x^0 y^0$ نقض می‌کند. فرض کنیم $\tau > 0$. قرار می‌دهیم

$$F_\tau(x, s, y) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T s + y - c \\ xy - \tau e \end{bmatrix}$$

که در آن e برداری است که همه‌ی درایه‌های آن برابر یك است.

مسیر مرکزی

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

روش نقطه داخلی با یك تکرار اکیداً شدنی اولیه دوگان مانند $z^0 = (x^0, s^0, y^0)$ آغاز می‌شود. این نقطه در معادلات خطی (شدنی اولیه) و (شدنی دوگان) صدق می‌کند ولی معادله (مکمل کمبود) را به اندازه‌ی $x^0 y^0$ نقض می‌کند. فرض کنیم $\tau > 0$. قرار می‌دهیم

$$F_\tau(x, s, y) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T s + y - c \\ xy - \tau e \end{bmatrix}$$

که در آن e برداری است که همه‌ی درایه‌های آن برابر یك است.

مسیر مرکزی

برای هر $\tau > 0$ دستگاه $F_\tau(x, s, y) = 0$ دارای جواب منحصر به فرد (x_τ, s_τ, y_τ) است.
مجموعه‌ی $C = \{(x_\tau, s_\tau, y_\tau) : \tau > 0\}$ را **مسیر مرکزی** می‌نامیم.
واضح است که اگر $\tau \to 0$ آنگاه مسیر مرکزی به جواب بهینه می‌گراید.

حال فرض کنیم $\tau = \sigma\mu = \frac{\sigma}{n}(x^0)^T y^0$ که در آن $\sigma \in [0,1]$ **پارامتر مرکزیت** نامیده می‌شود. با حل دستگاه نیوتن برای معادله‌ی $F_\tau(z) = 0$ جهت مناسب را می‌یابیم. طول گام $\alpha > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای تکرار جدید یعنی $z^1 = z^0 + \alpha\Delta z$ داشته باشیم $(x^1, y^1) \geq 0$.

حال فرض کنیم $\tau = \sigma\mu = \frac{\sigma}{n}(x^0)^T y^0$ که در آن $\sigma \in [0,1]$ **پارامتر مرکزیت** نامیده می‌شود. با حل دستگاه نیوتن برای معادله‌ی $F_\tau(z) = 0$ جهت مناسب را می‌یابیم. طول گام $\alpha > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای تکرار جدید یعنی $z^1 = z^0 + \alpha\Delta z$ داشته باشیم $(x^1, y^1) \geq 0$.
از این رو در روش‌های نقطه داخلی سعی می‌شود که تکرارها روی مسیر مرکزی قرار گیرند. اما حرکت در همسایگی‌ای از آن نیز کفایت می‌کند. همسایگی‌های مختلفی برای مسیر مرکزی ارائه شده‌اند.

$$N_2(\theta) = \{(x, s, y) \in F^\circ \ : \ \|xy - \mu e\| \leq \theta\mu\}$$

$$N_{-\infty}(\gamma) = \{(x, s, y) \in F^\circ \ : \ \min x_i y_i \geq \gamma\mu\}$$

که در آن $0 \leq \theta \leq 1$ و γ یك عدد مثبت بسیار کوچك است.

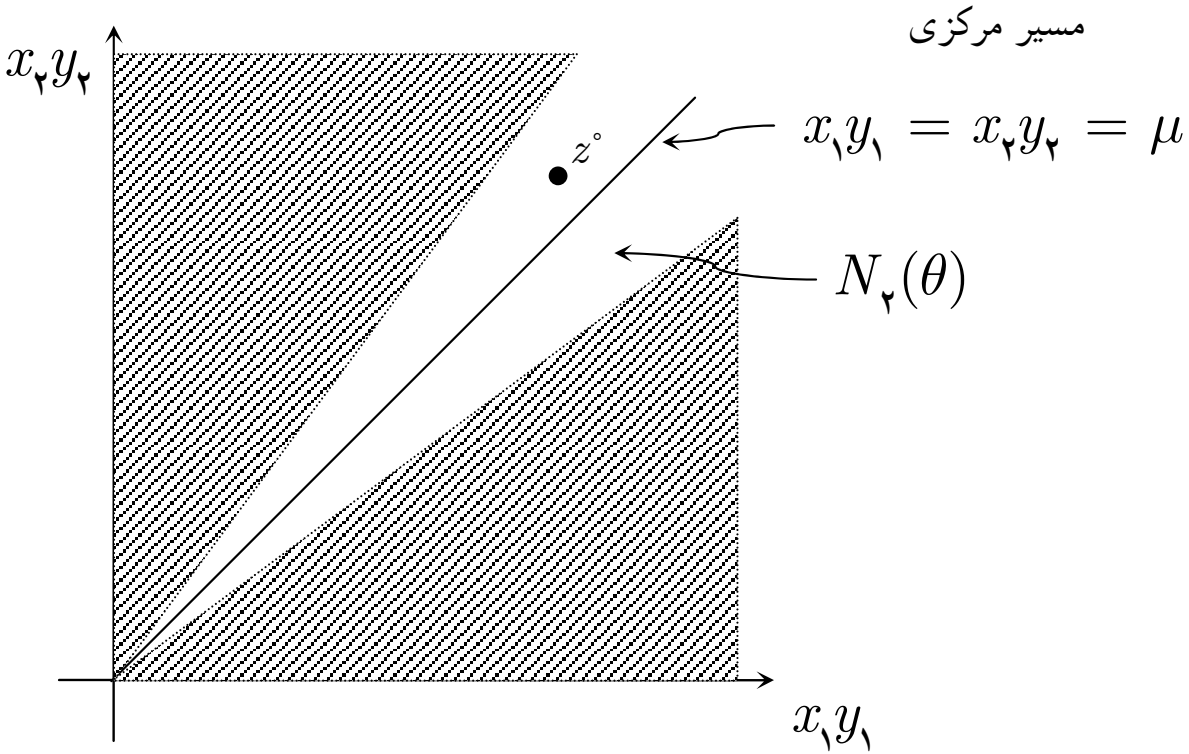
الگوریتم کلی روش‌های نقطه داخلی اولیه-ثانویه پیروِ مسیر

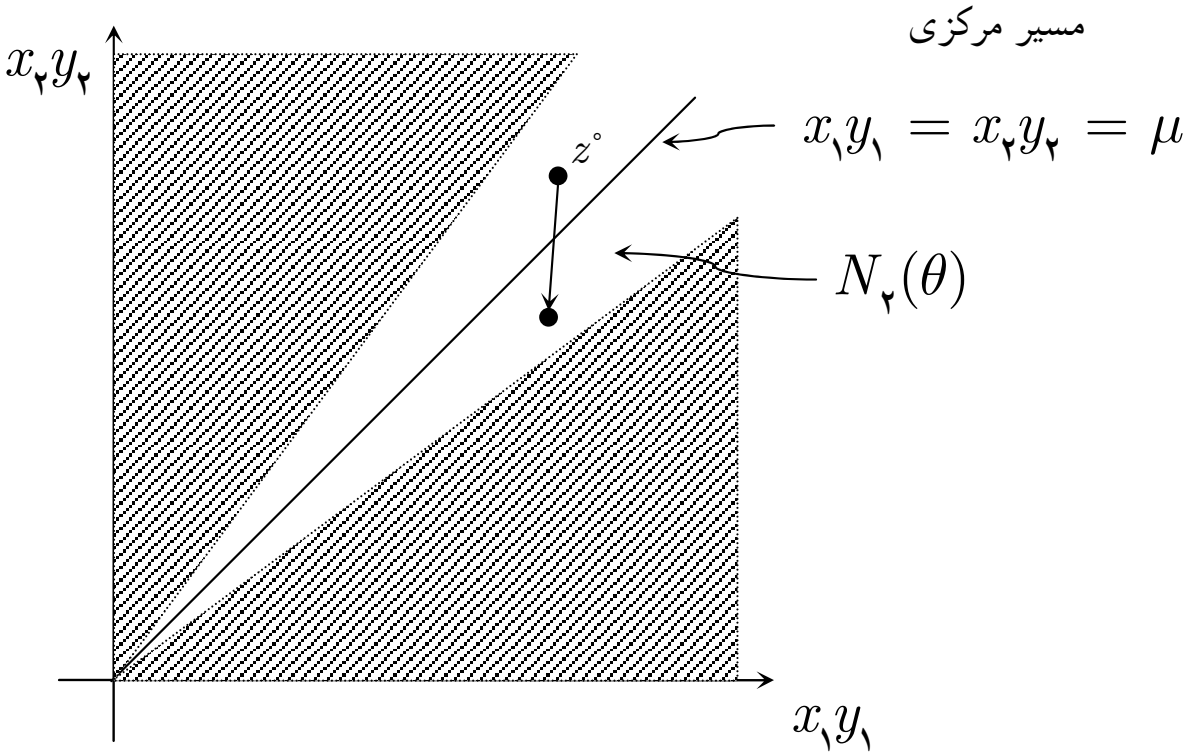
الگوریتم کلی روش‌های نقطه داخلی اولیه-ثانویه پیروِ مسیر

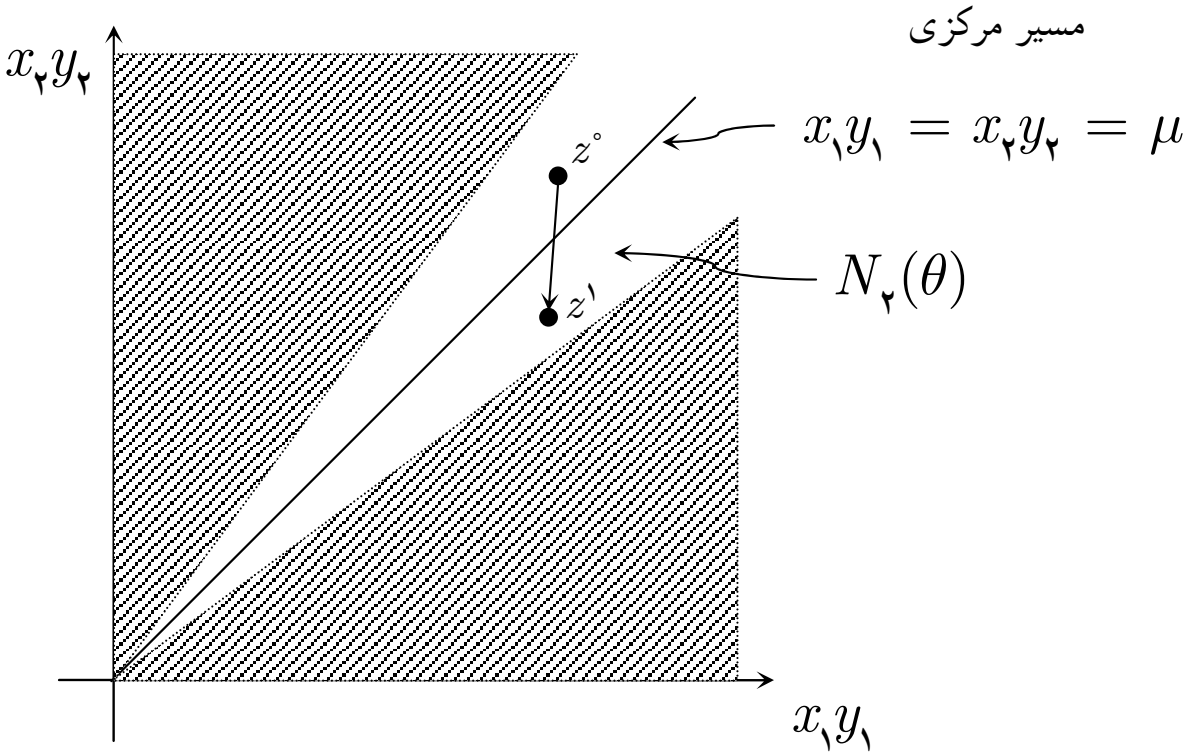
1. فرض کنیم $z^0 = (x^0, s^0, y^0) \in F^\circ$.
2. برای $k = 0, 1, \ldots$ گام‌های زیر را انجام دهید
   1. فرض کنید $\sigma_k \in [0, 1]$ و قرار دهید $\mu_k = (x^k)^T y^k / n$. دستگاه زیر را برای یافتن $\Delta z^k = (\Delta x^k, \Delta s^k, \Delta y^k)$ حل کنید

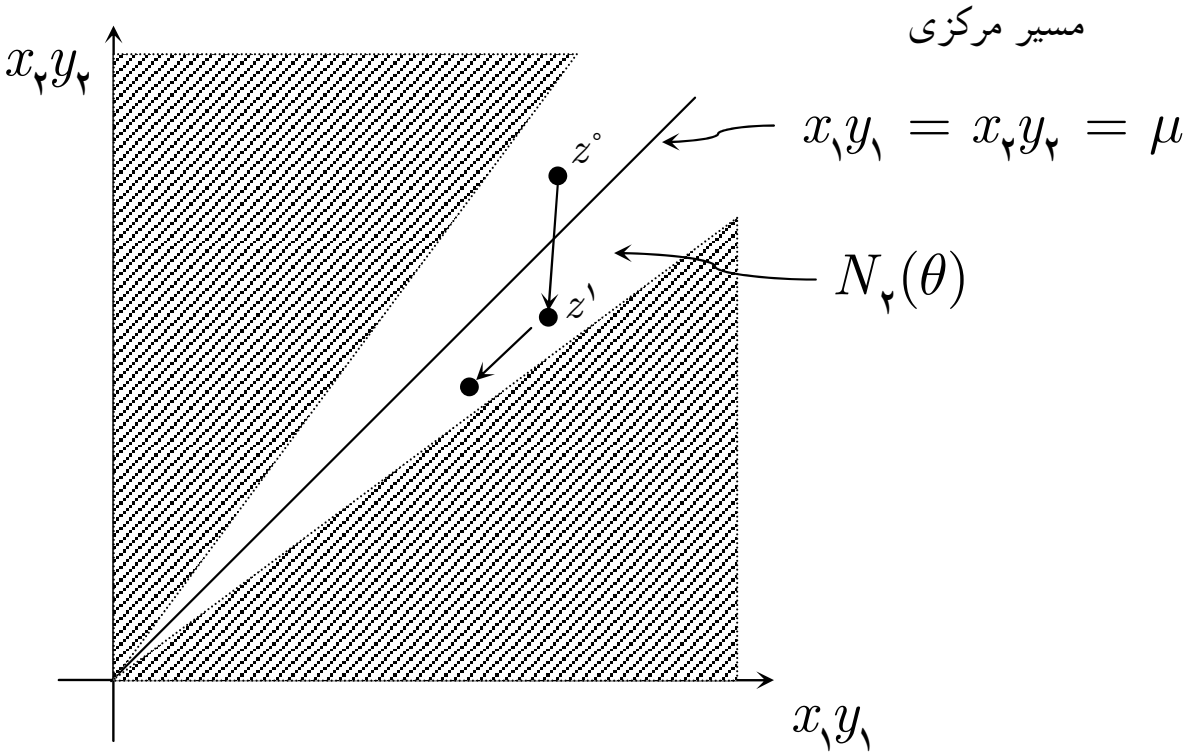
$$\nabla F_{\sigma_k \mu_k}(z^k) \Delta z^k = -F_{\sigma_k \mu_k}(z^k).$$

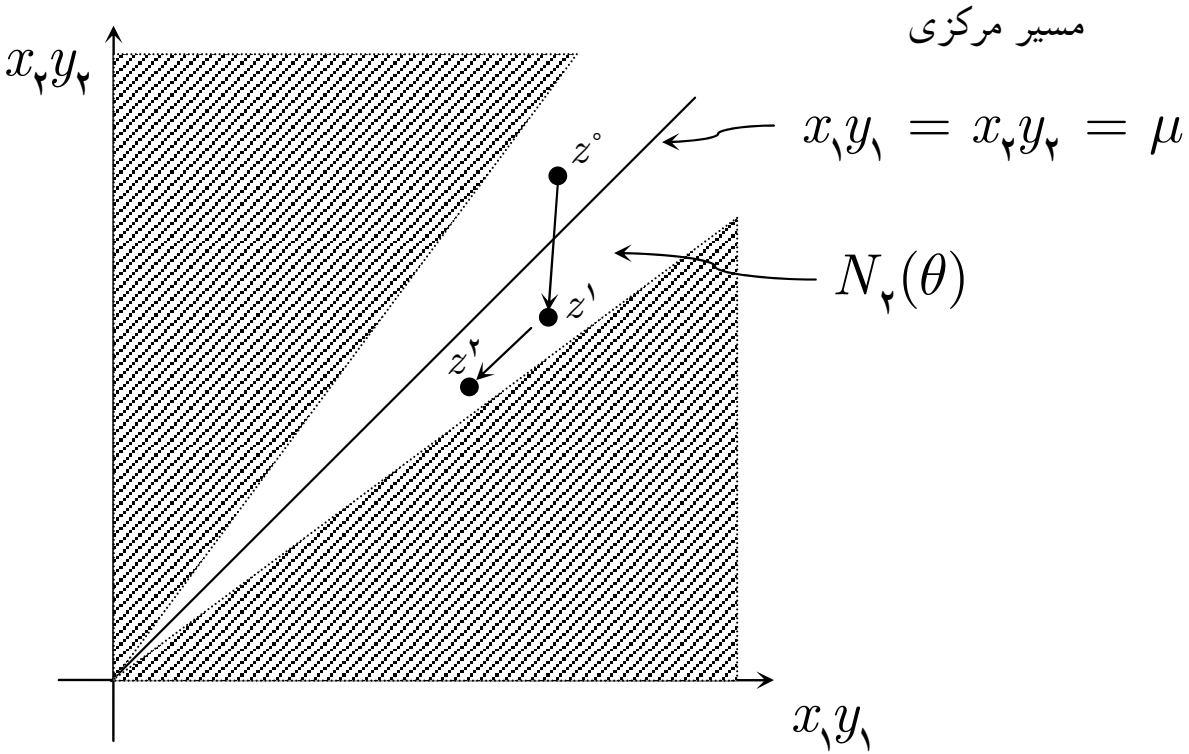
   2. قرار دهید $z^k + \alpha_k \Delta z^k \longrightarrow z^{k+1}$ که در آن α_k طوری تعیین می‌شود که $(x^{k+1}, y^{k+1}) > 0$.

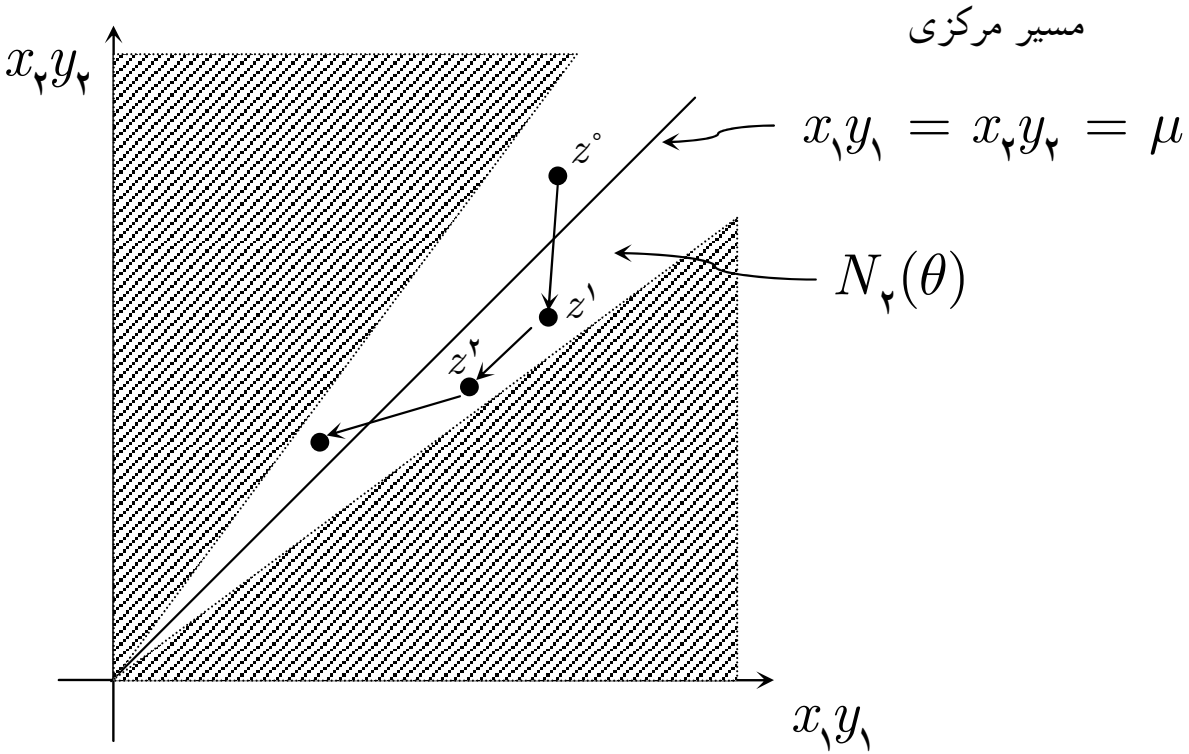

مسیر مرکزی
x_2y_2
z°
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
$N_2(\theta)$
x_1y_1

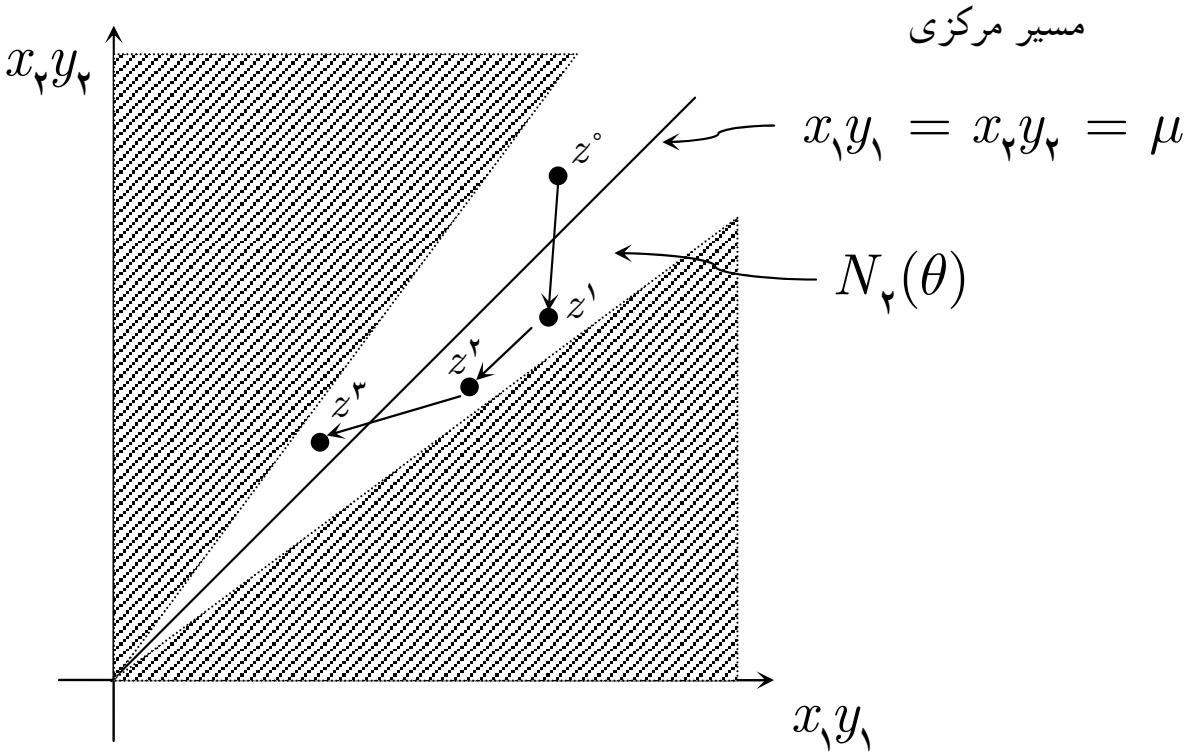

مسیر مرکزی
x_2y_2
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
z°
$N_2(\theta)$
x_1y_1


مسیر مرکزی
x_2y_2
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
z^0
z^1
$N_2(\theta)$
x_1y_1


مسیر مرکزی
x_2y_2
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
z^0
z^1
$N_2(\theta)$
x_1y_1


مسیر مرکزی
x_2y_2
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
z^0
z^1
z^2
$N_2(\theta)$
x_1y_1


مسیر مرکزی
x_2y_2
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
z^0
z^1
z^2
$N_2(\theta)$
x_1y_1


مسیر مرکزی
$x_1y_1 = x_2y_2 = \mu$
$N_2(\theta)$
x_2y_2
x_1y_1
z^0
z^1
z^2
z^3

الگوریتم پیرو مسیر نشدنی

الگوریتم اخیر با یك نقطه‌ی اولیه-دوگان اکیداً شدنی آغاز می‌شود، دو ایراد اساسی به این موضوع وارد است

- مجموعه‌ی F° برای برخی مسائل برنامه‌ریزی خطی تهی است.
- حتی در صورت ناتهی بودن F° یافتن چنین نقطه‌ای مستلزم صرف هزینه‌ی زیادی از نظر محاسباتی است.

الگوریتم پیرو مسیر نشدنی

الگوریتم اخیر با یك نقطه‌ی اولیه-دوگان اکیداً شدنی آغاز می‌شود، دو ایراد اساسی به این موضوع وارد است

- مجموعه‌ی F° برای برخی مسائل برنامه‌ریزی خطی تهی است.
- حتی در صورت ناتهی بودن F° یافتن چنین نقطه‌ای مستلزم صرف هزینه‌ی زیادی از نظر محاسباتی است.

برای رفع این مشکل برای معادلات خطی مانده در نظر گرفته می‌شود. و تکرارها به گونه‌ای ایجاد می‌شوند که این مانده‌ها به تدریج کاهش یابند. از این رو گام اصلی در چنین الگوریتمی که با عنوان

الگوریتم پیرو مسیر نشدنی

الگوریتم اخیر با یك نقطه‌ی اولیه-دوگان اکیداً شدنی آغاز می‌شود، دو ایراد اساسی به این موضوع وارد است

- مجموعه‌ی F° برای برخی مسائل برنامه‌ریزی خطی تهی است.
- حتی در صورت ناتهی بودن F° یافتن چنین نقطه‌ای مستلزم صرف هزینه‌ی زیادی از نظر محاسباتی است.

برای رفع این مشکل برای معادلات خطی مانده در نظر گرفته می‌شود. و تکرارها به گونه‌ای ایجاد می‌شوند که این مانده‌ها به تدریج کاهش یابند. از این رو گام اصلی در چنین الگوریتمی که با عنوان الگوریتم پیروِ مسیر نشدنی خوانده می‌شود حل دستگاه زیر است

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Y & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-\sigma) r_b \\ -(1-\sigma) r_c \\ -xy + \sigma \mu e \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

که در آن $r_b = b - Ax$ ، $r_c = A^T s + y - c$ و $X = \mathrm{diag}(x)$ و $Y = \mathrm{diag}(y)$.

بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -\theta^{-2} & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \tag{۶}$$

$$\Delta y = \eta_3 - \theta^{-2}\Delta x \tag{۷}$$

که در آن $\theta^{-2} = X^{-1}Y$ و

بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -\theta^{-2} & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \tag{۶}$$

$$\Delta y = \eta_3 - \theta^{-2}\Delta x \tag{۷}$$

که در آن $\theta^{-2} = X^{-1}Y$ و

$$\begin{aligned} \eta_3 &= X^{-1}(-xy + \sigma\mu e), \\ \eta_2 &= (\sigma - 1)r_c - \eta_3, \\ \eta_1 &= (\sigma - 1)r_b. \end{aligned}$$

به دستگاه (۶)، **دستگاه معادلات افزوده** گفته می‌شود.

برای این که از کاهش مانده‌ها اطمینان حاصل کنیم، تکرارها باید در همسایگی $N_{-\infty}(\gamma, \beta)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود قرار گیرند

$$N_{-\infty}(\gamma, \beta) = \left\{ (x, s, y) : (x, y) > 0,\ \|(r_b, r_c)\| \leq \frac{\|(r_b^0, r_c^0)\|}{\mu_0} \beta\mu \right\}$$

که در آن $\beta \geq 1$ و r_b^0، r_c^0 و μ_0 به ترتیب مانده‌ها و تفاضل دوگانی در تکرار آغازین هستند.

نشاندن خود-دوگان

نشاندن خود-دوگان

در این روش نیز پیچیدگی‌هایی از نظر پیاده‌سازی وجود دارد.

- برای اطمینان از همگرایی الگوریتم، نقطه‌ی اولیه باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایطی صدق کند. یك روش اثبات شده برای به دست آوردن چنین نقطه‌ای وجود ندارد.
- روش مطمئنی برای تشخیص بیکرانی یکی از مسائل و در نتیجه نشدنی بودن در دست نیست.

نشاندن خود-دوگان

در این روش نیز پیچیدگی‌هایی از نظر پیاده‌سازی وجود دارد.

- برای اطمینان از همگرایی الگوریتم، نقطه‌ی اولیه باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایطی صدق کند. یك روش اثبات شده برای به دست آوردن چنین نقطه‌ای وجود ندارد.
- روش مطمئنی برای تشخیص بیکرانی یکی از مسائل و در نتیجه نشدنی بودن در دست نیست.

نشاندن خود-دوگان

در این روش نیز پیچیدگی‌هایی از نظر پیاده‌سازی وجود دارد.

- برای اطمینان از همگرایی الگوریتم، نقطه‌ی اولیه باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایطی صدق کند. یك روش اثبات شده برای به دست آوردن چنین نقطه‌ای وجود ندارد.
- روش مطمئنی برای تشخیص بیکرانی یکی از مسائل و در نتیجه نشدنی بودن در دست نیست.

در این بخش مدلی را معرفی می‌کنیم که از مسأله‌ی اصلی بزرگتر است و همچنین

- یك جواب اکیداً شدنی اولیه-دوگان بدیهی دارد،
- اگر مسأله‌ی اصلی شدنی باشد، جواب آن به راحتی از جواب مسأله‌ی جدید حاصل می‌شوند و
- براحتی می‌توان نشدنی بودن مسأله‌ی اولیه را از روی جواب مسأله جدید تعیین کرد.

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی را در حالت استاندارد در نظر بگیرید. با اضافه کردن متغیر همگن τ و نوشتن مسائل اولیه و دوگان در کنار هم به مدل شدنی بودن خطی خود-دوگان و همگن دست می‌یابیم

$$\begin{array}{cccc} & Ax & -b\tau & = 0 \\ -A^T s & & +c\tau & \geq 0 \\ b^T s & -c^T x & & \geq 0 \\ & x, & \tau & \geq 0 \end{array}$$

مدل HLF یك مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف صفر وسمت راست صفر است. در واقع اگر

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی را در حالت استاندارد در نظر بگیرید. با اضافه کردن متغیر همگن τ و نوشتن مسائل اولیه و دوگان در کنار هم به مدل شدنی بودن خطی خود-دوگان و همگن دست می‌یابیم

$$\begin{array}{cccc} Ax & -b\tau & = 0 \\ -A^T s & +c\tau & \geq 0 \\ b^T s & -c^T x & \geq 0 \\ x, & \tau & \geq 0 \end{array}$$

مدل HLF یك مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف صفر وسمت راست صفر است. در واقع اگر متغیرهای کمبود را اضافه کنیم داریم

$$\begin{array}{lccccccc} \min & 0 & & & & & & \\ \text{s.t.} & & Ax & -b\tau & & & = 0 & \\ & -A^T s & & +c\tau & -y & & = 0 & (\lambda) \\ & b^T s & -c^T x & & & -\kappa & = 0 & \\ & & x, & \tau, & y, & \kappa & \geq 0 & \end{array}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که دوگان این مسأله با خودش یکی است و یك جواب اکیداً مکمل برای HLF مانند (x, s, τ, κ, y) علاوه بر شدنی بودن در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\tau\kappa = 0, \qquad xy = 0,$$
$$\tau + \kappa > 0, \qquad x + y > 0,$$

همچنین اگر $(x^*, s^*, \tau^*, \kappa^*, y^*)$ یك جواب اکیداً مکمل HLF باشد آنگاه

- اگر $\tau^* > 0$ آنگاه $\frac{1}{\tau^*}(x^*, s^*, \tau^*, \kappa^*, y^*)$ جواب اکیداً مکمل اولیه-دوگان مسأله‌ی اصلی است و
- اگر $\tau^* = 0$ آنگاه $\kappa > 0$ که نتیجه می‌دهد $c^T x^* - b^T s^* < 0$ و لذا حداقل یکی از مسائل اولیه یا دوگان نشدنی خواهد بود.

به وضوح مدل HLF فاقد يك نقطه شدنی درونی است. ولی می‌توان يك مسير مرکزی تعريف کرد که هر نقطه‌ی آغازين مانند (x, s, τ, κ, y) با $(x, \tau, \kappa, y) > 0$ را به جواب اکيداً مکمل HLF متصل کند. برای چنين نقطه‌ای مانده‌های شدنی بودن و ميانگين مانده‌های مکمل را به صورت زير تعريف می‌کنيم

$$
\begin{aligned}
r_P &= b\tau - Ax, \\
r_D &= c\tau A^T sy, \\
r_G &= c^T x - b^T s + \kappa, \\
\mu &= (x^T y + \tau\kappa)/(n+1).
\end{aligned}
$$

برای یك نقطه‌ی آغازین مانند $z^0 = (x^0, s^0, \tau^0, \kappa^0, y^0)$ با $(x^0, \tau^0, \kappa^0, y^0) > 0$ برای هر $\lambda > 0$ جواب مسأله‌ی زیر یك نقطه روی مسیر مرکزی مورد نظر می‌دهد

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\min & x^T y + \kappa\tau & & & & \\
\text{s.t.} & & Ax & -b\tau & & = -\lambda r_P^0 \\
& -A^T s & & +c\tau & -y & = \lambda r_D^0 \\
& b^T s & -c^T x & & -\kappa & = -\lambda r_G^0 \\
& & x, & \tau, & y, \quad \kappa & \geq 0
\end{array}
\tag{۹}
$$

که در آن (r_P^0, r_D^0, r_G^0) و μ_0 مانده‌ها در z^0 هستند.

براحتی می‌توان مشاهده کرد که در هر گام روش نقطه داخلی برای حل مدل HLF باید دستگاه زیر حل شود

$$\begin{bmatrix} & A & -b & & \\ -A^T & & c & -I & \\ b^T & -c^T & & & -1 \\ & Y & & X & \\ & & \kappa & & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta x \\ \Delta \tau \\ \Delta y \\ \Delta \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\gamma) r_P \\ -(1-\gamma) r_D \\ (1-\gamma) r_G \\ \gamma \mu e - xy \\ \gamma \mu - \tau \kappa \end{bmatrix}$$

که در آن $X = diag(x)$ و $Y = diag(y)$ و (r_P, r_D, r_G) و μ مانده‌ها در تکرار جاری هستند.

با محور گیری مناسب می‌توان این دستگاه را به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & \kappa/\tau & 0 \\ 0 & \kappa/\tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta\tau \\ \Delta\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

$$\Delta y = X^{-1}(\gamma\mu e - xy) - X^{-1}Y\Delta x \quad (۱۱)$$

که در آن

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & -X^{-1}Y \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{bmatrix} -b \\ -c \end{bmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{bmatrix} b^T & -c^T \end{bmatrix}.$$

و

$$b_1 = \begin{bmatrix} (1-\gamma)r_P \\ -X^{-1}(\gamma\mu e - xy) + (1-\gamma)r_D \end{bmatrix},$$
$$b_2 = (1-\gamma)r_G + (\gamma\mu - \tau\kappa)/\tau,$$
$$b_3 = (\gamma\mu - \tau\kappa)/\tau.$$

برای حل دستگاه (۱۰) ابتدا بردارهای h_1 و h_2 را از حل دستگاه‌های زیر محاسبه می‌کنیم

$$Q_{11}h_1 = b_1, \quad Q_{11}h_2 = Q_{12} \tag{۱۲}$$

سپس قرار می‌دهیم

$$\Delta\tau = \frac{b_1 - Q_{21}h_1}{\tau/\kappa Q_{21}h_2},$$
$$\Delta z_1 = h_1 - \Delta z_2 h_2,$$
$$\Delta\kappa = b_3 - \kappa/\tau\Delta\tau$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید برای یافتن بردارهای h_1 و h_2 دو دستگاه به شکل دستگاه افزوده حل می‌شود.

۲- موازی سازی

دیدیم که در هر گام یك روش نقطه داخلی دستگاه‌هایی به شکل زیر حل می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} -\theta^{-2} & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}$$

(دستگاه ماتریس افزوده)

با یك محورگیری می‌بینیم که این دستگاه را می‌توان به صورت زیر حل کرد

$$(A\theta^2 A^T)y = \nu + A\theta^2\mu \quad (۱۳)$$

$$x = \theta^2 A^T y - \theta^2\mu \quad (۱۴)$$

ماتریس ضرایب (۱۳) نیمه معین مثبت متقارن است. از این رو برخی از محققین به بررسی الگوریتم‌های تجزیه چولسکی موازی روی آورده‌اند. بدین منظور ابتدا با استفاده از یك الگورتیم ماتریس ضرایب را طوری تغییر می‌دهند که ضمن بدون تغییر ماندن جوابها، تعداد عناصر ناصفر در فرآیند تجزیه کمترین شود. سپس قسمت‌های مستقل ماتریس را تعیین و در نهایت آنها را به طور موازی حل می‌کنند.

در این بخش حالت خاصی از برنامه‌های خطی را در نظر می‌گیریم که بتوان محاسبات را به طور موازی انجام داد. دستگاه ماتریس افزوده را در نظر بگیرید. فرض کنید A به صورت زیر بلوکی شده باشد

$$A = \begin{bmatrix} V & D & 0 \\ M & H & S \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس‌های D، H و V به صورت زیر افراز شده‌اند

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D_K \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_K \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_K \end{bmatrix}$$

اینك دستگاه ماتریس افزوده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} -\theta_V^{-2} & 0 & 0 & V^T & M^T \\ 0 & -\theta_D^{-2} & 0 & D^T & H^T \\ 0 & 0 & -\theta_S^{-2} & 0 & S^T \\ V & D & 0 & 0 & 0 \\ M & H & S & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_V \\ \Delta x_D \\ \Delta x_S \\ \Delta y_D \\ \Delta y_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_V \\ \mu_D \\ \mu_S \\ \nu_D \\ \nu_H \end{bmatrix}$$

که در آن بردارهای (ماتریس‌های) با اندیس H ،V ،D و S افرازهای بردار (ماتریس) مورد نظر متناظر با ماتریس‌های H ،V ،D و S هستند.

با محورگیری در بلوك‌های واقع در مکان دوم و سومِ قطر اصلی داریم

$$\begin{bmatrix} P & N \\ N^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

(دستگاه شبه معین متقارن)

که در آن

$$P = D\theta_D^2 D^T, \quad C = \begin{bmatrix} H\theta_D^2 H^T + S\theta_S^2 S^T & M \\ M^T & -\theta_V^{-2} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} D\theta_D^2 H^T & V \end{bmatrix}$$

و

$$\xi_1 = V_D + D\theta_D^2 \mu_D$$
$$\xi_2 = \begin{bmatrix} \nu_H + H\theta_D^2 \mu_D + S\theta_S^2 \mu_S \\ \mu_V \end{bmatrix}$$

برای حل دستگاه شبه معین متقارن باید دو دستگاه زیر حل شوند

$$Pr_1 = \xi_1 - Nr_2, \tag{۱۵}$$
$$(C - N^T P^{-1} N) r_2 = \xi_2 - N^T P^{-1} \xi_1. \tag{۱۶}$$

ابتدا با حل دستگاه دوم مقدار r_2 حاصل می‌شود و با جایگذاری در دستگاه اول مقدار r_1 به دست می‌آید.
بنابراین ابتدا ماتریس ضرایب دستگاه دوم که آن را $\hat{C}$ می‌نامیم، محاسبه می‌کنیم. بدین منظور از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم

- ماتریس P را به $L_P L_P^T$ تجزیه کنید.
- ماتریس G را از حل دستگاه $L_P G = N$ محاسبه کنید.
- ماتریس $\tilde{G}$ را از حل دستگاه $L_P^T \tilde{G} = G$ محاسبه کنید.
- قرار دهید $B = N^T \tilde{G}$.
- قرار دهید $\hat{C} = C - B$.

شکل بلوکی ماتریس A برای اجرای موازی این الگوریتم به کار می‌آید

بنا به تعریف ماتریس C داریم

$$\begin{bmatrix} H\theta_D^2 H^T + S\theta_S^2 S^T & M \\ M^T & -\theta_V^{-2} \end{bmatrix}$$

چون H ساختار بلوکی دارد می‌توان عبارت $H\theta_D^2 H^T$ را به طور موازی محاسبه کرد. در واقع داریم

$$H\theta_D^2 H^T = \sum_{i=1}^{K} H_i \theta_{D_i}^2 H_i^T$$

هر جمله از مجموع اخیر یعنی $H_i\theta_{D_i}^2 H_i^T$ را می‌توان به طور مستقل محاسبه کرد. تا اینجا نشان دادیم که ماتریس C چگونه به طور موازی محاسبه می‌شود.
در ادامه الگوریتم تجزیه‌ی موازی ماتریس $\hat{C}$ را بیان می‌کنیم.

برای $1 \leq i \leq K$ قرار می‌دهیم

$$P_i = D_i \theta_{D_i}^2 D_i^T, \quad N_i = \begin{bmatrix} D_i \theta_{D_i}^2 H_i^T & V_i \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_K \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_K \end{bmatrix}$$

۱. ماتریس P_i را به $L_{P_i} L_{P_i}^T$ ، به ازای $i = 1, \ldots, K$، تجزیه کنید.
۲. ماتریس G_i را از حل دستگاه $L_{P_i} G_i = N_i$ ، به ازای $i = 1, \ldots, K$، محاسبه کنید.
۳. ماتریس $\tilde{G}_i$ را از حل دستگاه $L_{P_i}^T \tilde{G}_i = G_i$، به ازای $i = 1, \ldots, K$، محاسبه کنید.
۴. محاسبه‌ی B
   ۱. قرار دهید $B_i = N_i^T \tilde{G}_i$، برای $i = 1, \ldots, K$.
   ۲. قرار دهید $B = \sum_{i=1}^{K} B_i$.
۵. قرار دهید $\hat{C} = C - B$.
۶. ماتریس $\hat{C}$ را به $L_C \Gamma L_C^T$ تجزیه کنید.

توجه کنید که گام ۲-۴ را نمی‌توان به طور موازی اجرا کرد.

پس از تجزیه‌ی ماتریس $\hat{C}$ می‌توان حل دستگاه شبه معین متقارن را به صورت زیر کامل کرد

۱. با حل دستگاه $L_P\gamma = \xi_1$ مقدار γ را محاسبه کنید.
۲. بردار t را از حل دستگاه $L_P t = \gamma$ محاسبه کنید.
۳. قرار دهید $\omega = N^T t$.
۴. قرار دهید $\tilde{\xi}_2 = \xi_2 - \omega$.
۵. بردار β را از حل دستگاه $L_C \Gamma \beta = \tilde{\xi}_2$ محاسبه کنید.
۶. بردار r_2 را از حل دستگاه $L_C^T r_2 = \beta$ محاسبه کنید.
۷. مقدار λ را از $\lambda = N r_2$ محاسبه کنید.
۸. قرار دهید $\tilde{\gamma} = \xi_1 - \lambda$.
۹. بردار t را از حل دستگاه $L_P t = \tilde{\gamma}$ محاسبه کنید.
۱۰. بردار r_1 را از حل دستگاه $L_P^T r_1 = t$ محاسبه کنید.

۳- روش‌های نقطه داخلی برای برنامه‌های صحیح مختلط

یك مسأله‌ی برنامه‌ی صحیح مختلط، MIP را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{۱۷}$$

مسأله برنامه‌ریزی خطی حاصل از تعویض قید $x_i \in \{0,1\}$ با قید $s_i \geq 0 \quad ,0 \leq x_i + s_i \leq 1$، شکل ساده‌سازی شده‌ی MIP می‌نامیم.

روش شاخه و کران

در روش شاخه و کران دنباله‌ای از مسائل ساده‌سازی شده‌ی MIP حل می‌شود. پس از حل یك مسأله‌ی ساده‌سازی شده سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

1. مسأله‌ی جاری دارای جواب بهینه صحیح است. در این صورت کران بالای در نظر گرفته شده برای MIP بهنگام می‌شود.
2. مسأله‌ی جاری دارای جواب بهینه‌ای است که حداقل یك درایه‌ی کسری دارد. در این حالت با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای درایه‌ی کسری، اصطلاحاً زیرشاخه‌ها ایجاد می‌شوند.
3. مسأله‌ی جاری مقدار تابع هدفی بدتر از کران یافت شده برای MIP دارد. در این صورت این مسأله هرس می‌شود. یعنی زیرشاخه ایجاد نمی‌گردد.
4. مسأله‌ی جاری نشدنی است. واضح است که در این حالت نیز عمل هرس کردن صورت می‌گیرد.

هرگام روش شاخه و کران با اجرای الگوریتم سیمپلکس بر مسأله‌ی ساده‌سازی شده انجام می‌شود. می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان در هر گام روش شاخه و کران به جای روش سیمپلکس از روش نقطه داخلی بهره جست.

با توجه به این که از شکل خود-دوگان برای روش‌های نقطه داخلی استفاده میکنیم، تشخیص این که گام جاری باید هرس شود به راحتی انجام می‌شود.
اگر از روش سیمپلکس برای حل گره‌های به وجود آمده در گام‌های الگوریتم شاخه و برش استفاده کنیم، نقطه‌ی آغازین زیرمسأله‌ی جدید را می‌توان طوری انتخاب کرد که آن زیرمسأله در تعداد تکرارهای کمتری به جواب بهینه برسد. از این فرآیند با عنوان بهینه‌سازی مجددیاد میشود و نقطهی آغازین زیرمسأله را نقطه‌ی «آغازین گرم » می‌خوانند.
یکی از روش‌های بهینه‌سازی مجدد روش توقف زودهنگام است. در این روش قبل از پایان بهینه‌سازی در مورد شاخه زدن یا هرس کردن یك گره تصمیم گیری می‌شود.

برای شاخه زدن در یك گره باید بدانیم که کدام درایه کسری است. بدین منظور از روش زیر استفاده می‌کنیم فرض کنیم $\{(x^k, s^k)\}$ دنباله‌ی حاصل از روش نقطه داخلی باشند. در این صورت اگر

$$\frac{x_i^{k+1}}{x_i^k} \to 1$$
$$\frac{s_i^{k+1}}{s_i^k} \to 1$$

در این صورت درایه‌ی iام جواب بهینه، کسری است.

۴- مسائل مکانیابی

n : تعداد نقاط تقاضا،

m : تعداد مکان‌های مجاز برای تاسیس سرویس‌دهنده‌ها،

F_j : هزینه‌ی تاسیس یك سرویس دهنده در مکان j،

f_{ij} : هزینه‌ی برآورده کردن هر واحد نیاز نقطه‌ی i توسط سرویس‌دهنده‌ی واقع در مکان j.

در مسأله مکانیابی باظرفیت هدف انتخاب تعدادی از نقاط سرویس‌دهنده است به طوری که کل هزینه که شامل هزینه‌ی تاسیس سرویس‌دهنده‌ها و هزینه‌ی تامین خدمات به نقاط تقاضا است، کمینه شود.

مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله‌ی مکانیابی

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{m} F_j u_j \quad + \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} v_{ij} & & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{m} v_{ij} & = 1 & \quad i = 1, \cdots, n \\
& -u_j \quad + \quad v_{ij} & \leq 0 & \quad j = 1, \cdots, m, \quad i = 1, \cdots, n \\
& u_j & \in \{0, 1\} & \quad j = 1, \cdots, m \\
& v_{ij} & \geq 0 & \quad j = 1, \cdots, m, \quad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

فرض کنیم s_{ij} متغیر کمبود باشد. در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & v_{i1} & + & v_{i2} & + & \cdots & + & v_{im} & & & & & = & 1 \\
-u_1 & & & + & v_{i1} & & & & & + & s_{i1} & & & & & = & 0 \\
 & -u_2 & & + & & & v_{i2} & & & & & + & s_{i2} & & & = & 0 \\
 & & \ddots & & & & & \ddots & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
 & & & -u_m & + & & & & & v_{im} & & & & + & s_{im} & = & 0
\end{array}$$

بنابراین با فرض

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{im} & s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{im} \end{bmatrix}^T$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}^T$$

$$h_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

و همچنین

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad V_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

می‌توان نوشت

$$V_i u + D_i v_i = h_i$$

بنابراین مسأله‌ی مکانیابی بدون ظرفیت به صورت زیر بلوکی میشود

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\min & F^T u & + & f_1^T v_1 & + & f_2^T v_2 & + & \cdots & + & f_n^T v_n & & \\
\text{s.t.} & V_1 u & + & D_1 v_1 & & & & & & & & = h_1 \\
& V_2 u & + & & & D_2 v_2 & & & & & & = h_2 \\
& \vdots & + & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
& V_n u & + & & & & & & & D_n v_n & & = h_n \\
& & & v_1, & & v_2, & & \cdots & & v_n & & \geq 0 \\
& u & & & & & & & & & & \in \{0,1\}
\end{array}$$

که در آن

$$f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{im} \end{bmatrix}^T, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_m \end{bmatrix}$$

۵- نتایج محاسباتی

نتایج محاسباتی

نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم نقطه داخلی شاخه و کران برای چند مسأله‌ی مکانیابی بدون ظرفیت

ردیف	m	n	سطرها	ستون‌ها	تابع f_{ij}	جواب بهینه
۱	۴	۸	۴۰	۶۸	f_1	۶۵۳۲/۸
۲	۴	۱۸	۹۰	۱۴۸	f_4	۵۴۸۹۱
۳	۵	۱۵	۹۰	۱۵۵	f_6	۲۰۱۱۴
۴	۵	۲۰	۱۲۰	۲۰۱	f_5	۴۵۹۹۸
۵	۱۰	۲۵	۲۷۵	۵۱۰	f_1	۲۷۶۸۱
۶	۱۰	۳۰	۳۳۰	۶۱۰	f_2	۱۰۲۷۵۰

با سپاس فراوان از حضور شما