نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی

و

سیستم‌های دینامیکی

دکتر حسین خیری
وحید دامن‌افشان
مهسا مقدم
وجیهه وفائی

ویراستاران
دکتر غلامرضا حجتی
دکتر کاظم قنبری

تقدیم به
همه آن‌هایی که می‌خواهند بیشتر بدانند.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار ذ

۱ مفاهیم اولیه و مقدمات **۱**
۱.۱ مفاهیمی از توابع حقیقی ۲
۲.۱ قضیه اساسی وجود و منحصر بفردی جواب ۱۴
۳.۱ چند نکته و مثال ۲۲
۴.۱ ادامه جواب‌ها ۲۸
۵.۱ وابستگی جواب به شرایط اولیه و تابع f ۳۳
۶.۱ مسائل ۳۹

۲ سیستم معادلات دیفرانسیل **۴۳**
۱.۲ سیستم معادلات مرتبه اول ۴۳
۲.۲ سیستم معادلات خطی ۴۶
۱.۲.۲ سیستم معادلات خطی همگن ۴۸
۲.۲.۲ سیستم معادلات خطی ناهمگن ۵۷
۳.۲ محاسبه جواب سیستم معادلات با ضرایب ثابت ۶۲
۱.۳.۲ حل سیستم معادلات با استفاده از فرم جردن ۶۲
۲.۳.۲ حل سیستم معادلات با استفاده از تبدیل لاپلاس ۸۲
۳.۳.۲ حل سیستم معادلات با استفاده از روش سیلوستر ۸۵
۴.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه nام ۸۸
۱.۴.۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه nام ۹۳
۲.۴.۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبه nام ۹۷
۳.۴.۲ معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه nام با ضرایب ثابت ۹۸

۵.۲ مسائل ۱۰۱

۳ مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم ۱۰۷
۱.۳ ویژگی‌های کیفی جواب‌ها ۱۰۷
۲.۳ معادلات خودالحاق از مرتبه دوم ۱۱۰
۳.۳ نتایج اساسی برای نظریه اشتورم ۱۱۴
۴.۳ قضیه‌های تفکیک و مقایسه ۱۱۷
۵.۳ مسائل ۱۲۴

۴ سیستم‌های دینامیکی ۱۲۹
۱.۴ منحنی‌های جواب و تصویر فاز ۱۲۹
۲.۴ سیستم‌های خودگردان در صفحه ۱۳۹
۳.۴ انواع نقاط تعادل ۱۴۴
۴.۴ پایداری نقاط تعادل ۱۴۵
۵.۴ تصویر فاز در صفحه ۱۵۱
۱.۵.۴ رسم تصویر فاز با استفاده از محاسبات ۱۵۲
۲.۵.۴ رسم تصویر فاز با استفاده از هم‌شیب‌ها ۱۵۷
۶.۴ شار و وضعیت ۱۶۰
۷.۴ مسائل ۱۶۶

۵ سیستم‌های خطی ۱۷۱
۱.۵ سیستم خطی متعارف ۱۷۱
۲.۵ تصاویر فاز سیستم‌های متعارف در صفحه ۱۷۹
۱.۲.۵ سیستم‌های متعارف ساده ۱۷۹
۲.۲.۵ سیستم‌های متعارف غیرساده ۱۹۰
۳.۵ سیستم‌های خطی ساده در صفحه ۱۹۲
۱.۳.۵ تصویر فاز سیستم خطی ساده ۱۹۳
۲.۳.۵ دسته‌بندی سیستم‌های خطی ساده ۱۹۷
۴.۵ عملگر وضعیت ۱۹۹
۵.۵ مسائل ۲۰۲

۶ سیستم‌های غیرخطی در صفحه ۲۰۹
۱.۶ رفتار موضعی و کلی ۲۱۰
۲.۶ خطی‌سازی در یک نقطه تعادل ۲۱۰

۳.۶ بررسی پایداری نقاط تعادل با توابع لیاپانوف ۲۲۹
۴.۶ نقاط معمولی ۲۴۱
۵.۶ انتگرال‌های اولیه ۲۴۲
۶.۶ سیستم‌های همیلتونی ۲۴۵
۷.۶ نقاط حدی و دورهای حدی ۲۵۲
۸.۶ نگاشت پوانکاره ۲۵۸
۹.۶ نظریه پوانکاره-بندیکسون ۲۶۳
۱۰.۶ مسائل ۲۶۹

مراجع **۲۷۵**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۲۷۹**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۲۸۵**

نمایه **۲۹۱**

پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد و اهمیت بسزای معادلات دیفرانسیل در کمک به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نیز نظر به اینکه کتاب‌های ریاضی که تاکنون به زبان فارسی در رابطه با موضوع نظریه معادلات، ترجمه یا تالیف شده است، نیازهای فعلی جامعه ریاضی و علمی را برآورده نمی‌کند، بر آن شدیم به تالیف کتاب حاضر بپردازیم.

سطح این کتاب، به گونه‌ای است که برای دانشجویان سال آخر دوره کارشناسی رشته ریاضی و دانشجویان کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی، فیزیک، مکانیک و سایر رشته‌های مرتبط، قابل استفاده می‌باشد.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه معادلات دیفرانسیل در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم، آورده شده است. همچنین، با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب، به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

کتاب حاضر از شش فصل تشکیل شده است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه مورد بررسی قرار گرفته و نیز قضیه اساسی وجودی و منحصر بفردی جواب بیان شده است.

در فصل دوم، مباحث و مطالب فصل اول، روی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسیع داده شده است. همچنین در این فصل، سه روش مختلف برای حل سیستم معادلات ارایه شده است. لازم به ذکر است که روش حل سیستم معادلات با استفاده از روش جردن، بیشتر برای دوره‌های کارشناسی ارشد آورده شده است. لذا برای دوره‌های کارشناسی می‌توان از مطالعه این روش، چشم‌پوشی کرد. در ادامه فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه nام و قضیه‌های مربوط به آن، بررسی شده است.

فصل سوم در ارتباط با مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم است. در این فصل، قضیه‌های اساسی در ارتباط با مسایل مقدار مرزی، از جمله قضیه مقایسه‌ای و قضیه تفکیک آورده شده است.

در فصل چهارم، سیستم‌های دینامیکی معرفی شده است. تعاریف و مفاهیم نقاط ثابت، پایداری نقاط ثابت و تصویر فاز، با بیانی ساده و روان ارایه شده است.

فصل پنجم، درباره سیستم‌های دینامیکی خطی در صفحه بحث می‌کند. به بیان دقیق‌تر، سیستم‌های خطی متعارف و سیستم‌های خطی ساده در صفحه، بیان و تصاویر فاز مربوط به آن‌ها مورد کاوش قرار گرفته است.

فصل ششم درباره سیستم‌های غیرخطی در صفحه است. در واقع این فصل، دربرگیرنده مطالب تکمیلی فصل پنجم است. بیشتر مطالب این فصل، برای دوره‌های تحصیلات تکمیلی مناسب است.

لازم به ذکر است که در جمع‌آوری مطالب فصل‌های اول، دوم و سوم از جزوه درسی استاد گرامی، آقای دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام، عضو هیات علمی گروه ریاضی کاربردی دانشگاه تبریز، نیز استفاده شده است. همچنین در این کتاب، از قواعد آیین نگارش کتاب *دستور خطّ فارسی*، مصوب فرهنگستان زبان و ادب فارسی، ویرایش سال ۸۴ استفاده شده است به این امید که گامی هر چند کوتاه در راه استواری پایه‌های زبان و خط فارسی باشد.

در پایان، از آقای دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم آذربایجان که در ابتدای راه با ما همکاری کردند، آقای دکتر مرتضی فغفوری، عضو هیات علمی گروه ریاضی محض دانشگاه تبریز، به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌شان در استفاده از نرم‌افزار LaTeX، آقای دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام، به خاطر دلگرمی‌ها و راهنمایی‌هایشان، آقای دکتر کاظم قنبری، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه صنعتی سهند و آقای دکتر غلامرضا حجتی، عضو هیات علمی گروه ریاضی کاربردی دانشگاه تبریز به خاطر نگاه‌های تیزبینانه‌شان در هنگام ویراستاری کتاب و نیز از تمامی کسانی که به نحوی در امر آماده‌سازی و چاپ این کتاب، یاری‌گر ما بوده‌اند، سپاس‌گزاریم. امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

دکتر حسین خیری
وحید دامن‌افشان
مهسا مقدم
وجیهه وفائی

۱
مفاهیم اولیه و مقدمات

در بررسی مسایل کاربردی مختلف، با معادله‌های دیفرانسیل معمولی رو به رو می‌شویم که لازم است در شرط اولیه خاصی صدق کنند. چنین معادله‌هایی، مساله مقدار اولیه نامیده می‌شوند. در برخی حالت‌ها، با حل یک مساله مقدار اولیه و یافتن فرمولی برای جواب آن می‌توان وجودی جواب آن مساله مقدار اولیه و حتی منحصر بفردی آن را اثبات کرد. اما، در حالت کلی، این روش عملی نیست؛ زیرا بیشتر معادله‌ها را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی حل نمود. بنابراین، لازم است روشی بیان شود که وجود جواب معادلات دیفرانسیل و منحصر بفردی آن را بدون حل آن‌ها تضمین کند. ایده اصلی این روش، ساختن دنباله‌ای از توابع است به طوری که در حد به تابعی همگراست که در مساله مقدار اولیه صدق می‌کند ولی اعضای خود دنباله در آن صدق نمی‌کنند. اگرچه در عمل فقط می‌توان چند تا از اعضای دنباله را محاسبه کرد و یافتن تابع حدی در همه حالت‌ها ممکن نیست، ولی تحت شرایطی که برای قضیه وجود و منحصر بفردی جواب بیان می‌شود، می‌توان نشان داد که دنباله به جواب مطلوب همگرا است.

هدف اصلی در این فصل، بیان و اثبات قضیه وجود و منحصر بفردی و نتایج مربوط به آن برای مسایل مقدار اولیه مرتبه اول است. برای درک کامل اثبات‌ها، بایستی با بعضی از مفاهیم مشخص نظریه توابع حقیقی آشنا باشیم. از آنجا که شاید خواننده با این عناوین، قبلاً آشنا شده باشد، لذا اولین بخش را فقط به بیان خلاصه‌ای از این مطالب اختصاص می‌دهیم. سپس، به بررسی نتایج اساسی مرتبط با مسایل مقدار اولیه مرتبه اول از قبیل وجود، منحصر بفردی، توسیع‌پذیری و وابستگی جواب به شرایط اولیه و تابع f می‌پردازیم.

۱.۱ مفاهیمی از توابع حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ دنباله $\{c_n\}$ از اعداد حقیقی را **همگرا** نامند هرگاه نقطه‌ای مانند $c \in \mathbb{R}$ با این خاصیت وجود داشته باشد که به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد به طوری که $n \geq N$ نامساوی $|c_n - c| \leq \varepsilon$ را ایجاب کند. این عمل را با نماد

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c$$

نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱ با فرض

$$c_n = \frac{n}{۱+n}, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{۱+n} = ۱.$$

حل به ازای $\varepsilon > ۰$ داده شده، اگر داشته باشیم

$$|c_n - c| = \left|\frac{n}{۱+n} - ۱\right| = \frac{۱}{۱+n} \leq \varepsilon,$$

آنگاه n باید در نامساوی $n \geq \frac{۱}{\varepsilon} - ۱$ صدق کند. بنابراین، با انتخاب $N \geq [\frac{۱}{\varepsilon}]$، به ازای $n \geq N$، $\left|\frac{n}{۱+n} - ۱\right| \leq \varepsilon$ است. پس دنباله $\{c_n\}$ همگرا به ۱ است. ■

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی در بازه $[a, b]$ باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به بازه $[a, b]$، دنباله عددی $\{f_n(x)\}$ همگرا به $f(x)$ باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

در این صورت، گوییم دنباله توابع $\{f_n\}$، نقطه به نقطه روی بازه $[a, b]$ همگرا به $f(x)$ است. به عبارت دیگر، دنباله توابع $\{f_n\}$ را نقطه به نقطه روی بازه $[a, b]$ همگرا گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $x \in [a, b]$ عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که $n \geq N$ نامساوی $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ را ایجاب کند.

مثال ۴.۱.۱ دنباله توابع $\{f_n\}$ را روی بازه $[۰, ۱]$ با ضابطه

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+۱}, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

در نظر بگیرید. سه جمله اول این دنباله، توابع

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{2x}{2x+1}, \quad f_3(x) = \frac{3x}{3x+1}$$

هستند. به ازای $x = 0$، دنباله متناظر $\{f_n(0)\}$ همگرا به صفر است. اما به ازای xهایی که $x \in (0, 1]$، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = 1.$$

پس به ازای $x \in (0, 1]$، دنباله $\{f_n(x)\}$ همگرا به ۱ است. بدین ترتیب، دنباله $\{f_n(x)\}$ نقطه به نقطه روی بازه $[0, 1]$ به تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

همگراست. نمودار توابع f_1، f_5، f_{10} و همچنین تابع حدی f در شکل ۱.۱ رسم شده است.

حال فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته باشد که روی بازه $[a, b]$ نقطه به نقطه همگراست. آیا با این فرض‌ها، می‌توان پیوستگی تابع حدی f را نتیجه گرفت؟

جواب این سوال منفی است. تحت چنین فرض‌هایی، ممکن است f پیوسته باشد و یا نباشد. همچنان که در مثال ۴.۱.۱ دیده می‌شود، هر f_n روی بازه $[0, 1]$ پیوسته است و دنباله $\{f_n\}$ نقطه به نقطه روی بازه $[0, 1]$ همگرا است، اما تابع f روی این بازه پیوسته نیست.

برای اینکه تابع حدی دنباله‌ای از توابع پیوسته، خود پیوسته باشد، به نوع جدیدی از همگرایی نیازمندیم که از همگرایی نقطه به نقطه قوی‌تر است.

تعریف ۵.۱.۱ گوییم دنباله‌ای از توابع حقیقی مانند $\{f_n\}$ روی بازه $[a, b]$ به طور یکنواخت به تابع f همگراست هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که $n \geq N$ نامساوی $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ را به ازای هر $x \in [a, b]$ ایجاب کند.

تعبیر هندسی به ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه، نمودار تمامی توابع $y = f_n(x)$، $n > N$، به ازای هر $x \in [a, b]$، بین دو تابع $y = f(x) - \varepsilon$ و $y = f(x) + \varepsilon$ قرار دارند. شکل ۲.۱ را ببینید.

واضح است که هر دنباله به طور یکنواخت همگرا، نقطه به نقطه همگراست. تفاوت این دو نوع همگرایی را می‌توان به این صورت بیان کرد که هرگاه $\{f_n\}$ بر بازه $[a, b]$ نقطه به نقطه همگرا باشد، در این صورت، تابعی چون f هست که به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in [a, b]$، عدد طبیعی مانند N، وابسته به ε و x، وجود داشته باشد به طوری که به ازای $n \geq N$، نامساوی